

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α. Ορισμός σχολικού βιβλίου – σελίδα 15
 β. (i, ii) Σχολικό – σελίδες 35,36
- A2.** Θεώρημα σχολικού βιβλίου – σελίδα 142
- A3.** Θεώρημα σχολικού βιβλίου – σελίδα 135
- A4.** α. Λάθος, Σχόλιο σχολικού βιβλίου – σελίδα 134
 β. Λάθος, Σχόλιο 3ο (σχήμα 39β) σχολικού βιβλίου – σελίδα 41
 Αντιπαράδειγμα – σελίδα 71
- A5.** γ. 4
 Βάση του σχόλιου σχολικού βιβλίου (σελίδα 228),

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$$

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Αφού η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = \lambda, \text{ συνεπώς } \lambda = 2.$$

$$\text{Συνεπώς } f(x) = e^{-x} + 2.$$

- B2.** Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} + 2 - x = 0$$

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow g \downarrow$$

- Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ (ως άθροισμα συνεχών)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = \frac{1}{e^2} > 0 \\ g(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(2) \cdot g(3) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3) : g(x_0) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας.

- B3.** Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$e^{-x_1} + 2 = e^{-x_2} + 2 \Leftrightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \xrightarrow{\text{"1-1"}} \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1.

**β' τρόπος:**

$f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα. Άρα η f είναι 1-1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα γιατί $f'(x) = -e^{-x} < 0$.

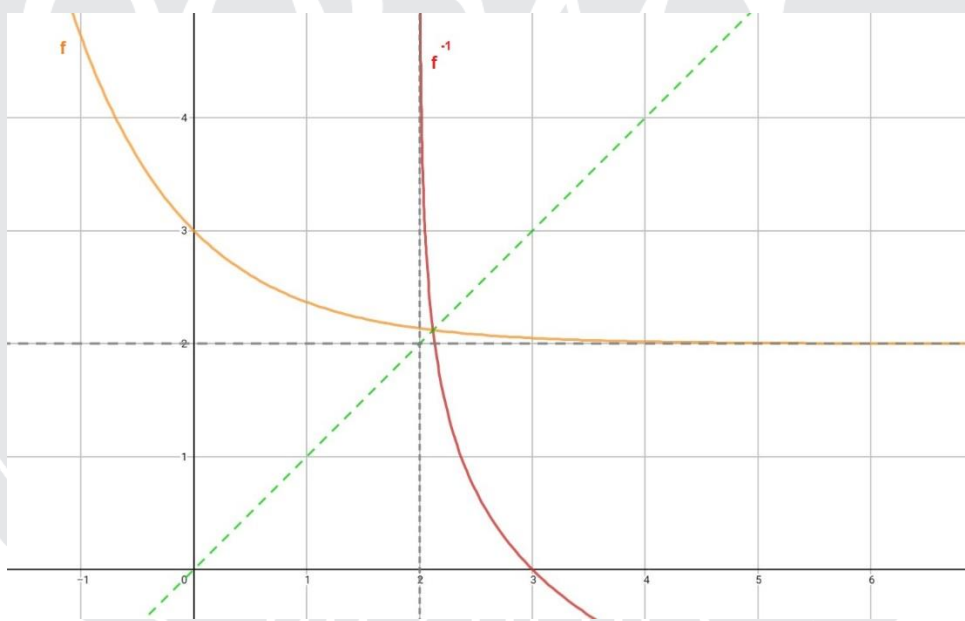
$$f(\mathbb{R}) = (2, +\infty) \Rightarrow A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2) \quad y > 2$$

$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$$

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2)) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$$

Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Θα πρέπει

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^0 + \beta = 1 + \beta \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$$



Επίσης, θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \beta \frac{x - 1}{x - 1} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \beta \right) = 1 + \beta, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \beta$.

Άρα, $1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$

Άρα $\alpha = \beta = 1$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Για $x \in (-\infty, 1) : f'(x) = (x - 1)'e^{x-1} + x' = e^{x-1} + 1 \Rightarrow e^{x-1} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

Για $x \in (1, +\infty) : f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (απορρίπτεται)

Οπότε

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$2x$	-	+	+	+
$e^{x-1} + x$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$f(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Γ3. i) Αν $f_1(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ αδύνατη.

και $f_2(x) = e^{x-1} + x$

για $x = 0 : f_2(0) = e^{-1} + 0 = \frac{1}{e} > 0$

για $x = -1 : f_2(-1) = e^{-2} - 1 = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι: $f_2(0) \cdot f_2(-1) < 0$ άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μοναδική λόγω μονοτονίας.

**β' τρόπος:**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ Αδύνατη}$$

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-1} + x) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f((-\infty, 0]) = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

$0 \in f((-\infty, 0)) \Rightarrow$ υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό λόγω

μονοτονίας

$$\text{ii) } f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f(x) - x_0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ (1) ή } f(x) = x_0 \text{ (2)}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow f \\ \text{για } x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0 \end{array}$$

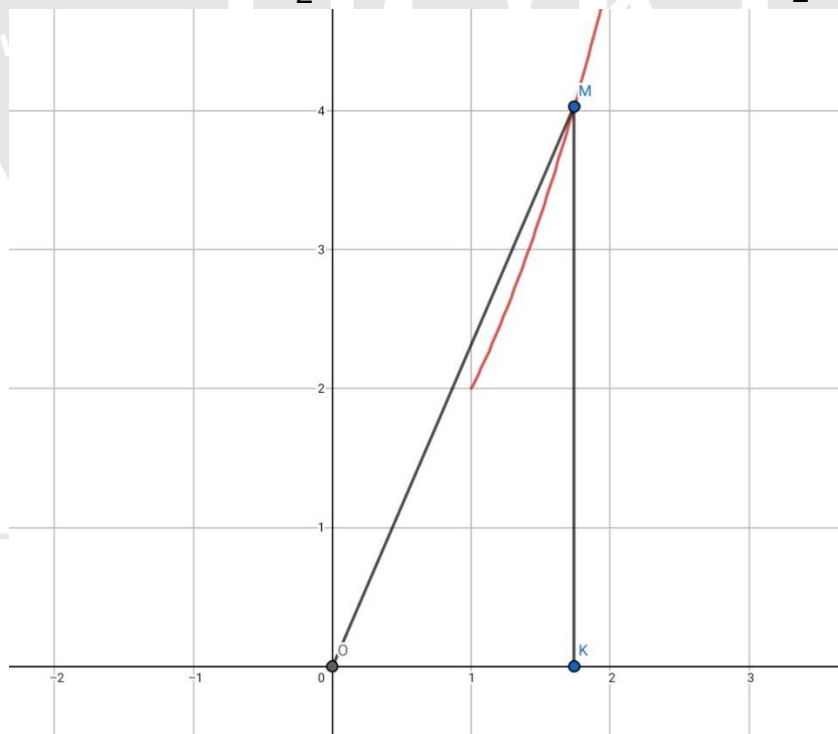
άρα η (1) είναι αδύνατη, αφού $f(x) > 0$

και η (2) είναι αδύνατη, αφού $f(x) > 0$ ενώ $x_0 < 0$.

Γ4. Είναι $x(t_0) = 3, y(t_0) = 10, x'(t_0) = 2 \mu\text{ον.} / \text{sec}$ με $y = x^2 + 1, x \geq 1$

$$E = \frac{OK \cdot KM}{2} = \frac{xy}{2} = x \cdot \frac{x^2 + 1}{2} \text{ άρα } E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2} \text{ τότε}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2} \text{ για } t = t_0 \quad E'(t_0) = \frac{3 \cdot 9 \cdot 2 + 2}{2} = 28 \mu. / \text{sec}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$
 και $f'(1) = -1$

$$\text{Όμως } f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 0 + 0 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και } \beta = 1 - \alpha \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$\textbf{Δ2. } E = \int_1^2 |f(x) + x - 2| dx = \int_1^2 |(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)| dx$$

$$\text{Είναι } x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \text{ και } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \xRightarrow{\ln \uparrow} \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$$

$$\text{Άρα } (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \text{ στο } [1, 2].$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } E &= \int_1^2 (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 2(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 2x + 2) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \ln 2 - 2) - \frac{1}{2} (1 \cdot \ln 1 - 1) = \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

β' τρόπος:

$$\text{Θέτω } u = x^2 - 2x + 2 \dots$$

$$\textbf{Δ3. } \text{i) } f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$\text{Αρκεί } \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0, \text{ ισχύει αφού:}$$

- $\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ από ερώτημα (Δ2)
- $2(x-1)^2 \geq 0$
- $x^2 - 2x + 2 > 0$

$$\text{Άρα } f'(x) \geq -1.$$

β' τρόπος:

Μελέτη της f' με f'' με πίνακα προσήμου.

Βρίσκω τοπικό ελάχιστο της f' στο σημείο για $x=1$ το $f'(1) = -1$.

$$\text{ii) } f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$



$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - 2 + \frac{3}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \frac{1}{2} + \lambda]$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(\lambda, \frac{1}{2} + \lambda)$.

Αρα από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\lambda, \frac{1}{2} + \lambda)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = f'(\xi).$$

Όμως από ερώτημα Δ3 ισχύει ότι $f'(x) \geq -1$ άρα και $f'(\xi) \geq -1$.

$$f(x_1) \cdot \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}.$$

Δ4. α' τρόπος :

Έστω ότι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη, με σημεία επαφής $B(x_1, f(x_1))$ και $\Gamma(x_2, g(x_2))$ πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$ (*)

Όμως, $f'(x_1) \geq -1$ και $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$

Επομένως η (*) ισχύει μόνο εφόσον $f'(x_1) = -1$ και $g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_2 = 0$

Η C_g στο $\Gamma(0, 2)$ έχει εφαπτομένη την $y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$ για την οποία ήδη γνωρίζουμε ότι εφάπτεται της C_f στο $A(1, 1)$.

Άρα μοναδική κοινή εφαπτομένη η $y = -x + 2$.

β' τρόπος :

Έστω τα σημεία επαφής για τις συναρτήσεις $A \in C_f$ και $B \in C_g$

Αρκεί $f'(\alpha) = g'(\beta)$ και $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta)$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \Leftrightarrow f'(\alpha) = \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} - 1$$

$$g'(x) = -3x^2 - 1 \Leftrightarrow g'(\beta) = -3\beta^2 - 1$$

$$\text{άρα } f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} - 1 = -3\beta^2 - 1 \quad (1)$$

$$\text{Όμως από Δ3 i έχουμε } \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} \geq 0$$



άρα και $-3\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3\beta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ Μοναδικό

$$\text{άρα για } \beta = 0 \text{ η } (1) \Rightarrow \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) + \frac{2(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} = 0$$

$$\bullet \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\bullet \frac{2(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Οπότε σημεία επαφής $A(1, f(1))$, δηλαδή $A(1,1)$ και $B(0, g(0))$ δηλαδή $B(0,2)$.

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y - 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 2$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(0,2)$

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

$$y - 2 = -1(x - 0)$$

$$y - 2 = -x$$

$$y = -x + 2$$