ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΝΑΤΑΣΑ ΠΑΠΑΓΟΥΛΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΟΓΙΟΠΟΥΛΟΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΖΑΦΕΙΡΗΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΤΣΙΜΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΕΡΕΜΗΣ, ΗΛΙΑΣ ΚΟΥΝΤΟΥΠΗΣ

Νέο Φροντιστήριο
www.neo.edu.gr

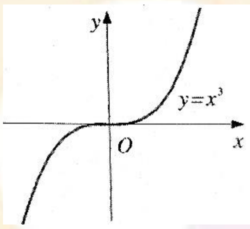
ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό θεωρία σελ. 76

Α2. σχολικό θεωρία σελ. 104

Α3. **α)** Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει ότι η παράγωγός της $f'(x)=3x^2$ είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$.



Α4. **α)** Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

$D_f=(1,+\infty)$

$D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } x>0\}$

Άρα $D_{fog}=(0,+\infty)$

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(e^x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$$

Β.2.

$$(fog)(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1} \quad x>0$$

Η (fog)(x) είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$(fog)'(x)=\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$(e^x-1)^2>0$ για κάθε $x>0$

$-3e^x<0$ για κάθε $x>0$

Άρα (fog)΄(x)<0 για κάθε $x>0$. Επομένως η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

$$(fog)(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x),\lim_{x\to 0^+}(fog)(x)\right)=(1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(fog)(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}\cdot(e^x+2)=+\infty\cdot 3=+\infty$$

Για $x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$ άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$

Θέτουμε (fog)(x)=y$\Leftrightarrow$ y=$\frac{e^x+2}{e^x-1}$ $\Leftrightarrow y(e^x-1)=e^x+2 \Leftrightarrow e^x=\frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow$

$x=ln\frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow$ $(fog)^{-1}$(x)=$ln\frac{2+y}{y-1}$

$$D_{fog^{-1}}=(fog)(A)=(1,+\infty)$$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα

B.3.

Η $\varphi(x)=ln\frac{x+2}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x)=\left(ln\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}$$

Για $x>1 \Leftrightarrow x-1>0\ και\ x+2>3>0$

Άρα $\varphi'(x)<0$. Επομένως η $\varphi(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

B.4.

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{u\to +\infty} lnu = +\infty$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}(x+2) = +\infty \cdot 3 = +\infty$

Για $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ Άρα $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{u\to 1} lnu = 0$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\chi}{x} = 1$