

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΝΑΤΑΣΑ ΠΑΠΑΓΟΥΛΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΟΓΙΟΠΟΥΛΟΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ
ΖΑΦΕΙΡΗΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΤΣΙΜΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΕΡΕΜΗΣ,
ΗΛΙΑΣ ΚΟΥΝΤΟΥΠΗΣ



νέο φροντιστήριο

νέο φροντιστήριο

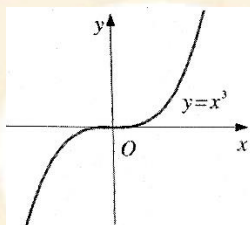
ΘΕΜΑ Α

A1. σχολικό θεωρία σελ. 76

A2. σχολικό θεωρία σελ. 104

A3. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει ότι η παράγωγός της $f'(x) = 3x^2$ είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0) = 0$.



A4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1.

$$D_f = (1, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$A = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\}$$

$$\text{Άρα } D_{f \circ g} = (0, +\infty) = A$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

B.2.

$$(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \quad x > 0$$

Η $(f \circ g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$(e^x - 1)^2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

$$-3e^x < 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα $(f \circ g)'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

$$(f \circ g)(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) \right) = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} \cdot (e^x + 2) = +\infty \cdot 3 = +\infty$$

$$\text{Για } x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\text{Θέτουμε } (f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow y(e^x - 1) = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \ln \frac{2+y}{y-1}$$

$$D_{f \circ g^{-1}} = (f \circ g)(A) = (1, +\infty)$$

B.3.

Η $\varphi(x) = \ln \frac{x+2}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(\ln \frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{Για } x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \text{ και } x + 2 > 3 > 0$$

Άρα $\varphi'(x) < 0$. Επομένως η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B.4.

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x+2}{x-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} (x+2) = +\infty$, γιατί

για $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$, δηλαδή θα πρέπει

$$\text{να ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = \frac{1}{1-0} - \ln \lambda \Leftrightarrow$$

$$1 - \ln \lambda = \lambda = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda$$

Παρατηρούμε ότι μία λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι ο $\lambda=1$ και θα αποδείξουμε ότι λύση

αυτή είναι μοναδική. Πράγματι θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(\lambda) = 1 - \ln \lambda - \lambda$, $\lambda > 0$, με

$g'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$, $\lambda > 0$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και η λύση $\lambda=1$ είναι μοναδική. Τότε

$$\text{θα έχουμε : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ2. Προφανώς $f(0) = \frac{1}{1-0} - \ln 1 = 1$ και για να δείξουμε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$A(0,1)$, θα πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Πράγματι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1, \text{ άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

$x_0 = 0$, με $f'(0) = 1$ και επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$. Η εξίσωση της θα είναι: $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = 1 \cdot x + 1$. Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης της

ευθείας (ε) είναι $\lambda = 1 = \varepsilon\phi\omega$, οπότε $\omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3. Προφανώς $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$. Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της f

αναζητούμε τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f που η f' δεν ορίζεται ή η f' μηδενίζεται. Επειδή η f είναι παντού παραγωγίσιμη, τα κρίσιμα σημεία θα τα βρούμε εκεί που θα ισχύει: $f'(x) = 0$.

Για $x < 0$ προφανώς $f'(x) > 0$, Άρα $f'(x) \neq 0$. Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$

$$f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2κ\pi + x, & κ \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = 2κ\pi - x, & κ \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - κ\pi, κ \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Θα πρέπει } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - κ\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < κ < \frac{1}{4} \Leftrightarrow κ = 0, κ = -1, \text{ Άρα } x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}.$$

Επομένως η f έχει κρίσιμα σημεία στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \leq 0$ δίνεται από τον τύπο:

(η): $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x - \alpha)$ και επειδή η ευθεία (η) τέμνει τον xx' στο σημείο

$B(\beta, 0)$, οι συντεταγμένες του σημείου B θα επαληθεύουν την (η). Δηλαδή:

$$0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (\beta - \alpha) \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 1$$

$$\text{Οπότε : } \beta(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow \beta'(t) = 2\alpha'(t) \Rightarrow \beta'(t) = 2\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) \Rightarrow \beta'(t_0) = 2\left(-\frac{\alpha(t_0)}{3}\right) = 2\left(-\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} \frac{\mu\text{ον}}{\text{sec}},$$

αφού $\alpha(t_0) = -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = \mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής, με $f'(x) = e^x + 2x - e$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής με $f''(x) = e^x + 2 > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $\Delta = (0, 1)$. Οπότε $f'(\Delta) = (1 - e, 2)$

$0 \in f'(\Delta)$ άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό, αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$, $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$

και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$

$$\text{Είναι } f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

Τότε

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1$$

Δ2.

Για $x \neq x_0$ έχουμε $\eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) \geq -1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}$ (1)

Εφόσον $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο της f έχουμε $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}) = +\infty$ (2).

Οπότε από 1 και 2 είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (\eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}) = +\infty$.

Δ3.

Έστω $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$ συνεχής.

$$g(x_0) = f(x_0) < 0 \text{ γιατί } x_0 < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(1) = 0$$

$$g(1) = 1 - x_0 > 0, (x_0 \in (0, 1))$$

Είναι $g(x_0)g(1) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ρίζα $\rho \in (x_0, 1)$ της $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x_0$

$$g'(x) = f'(x) + 1 > 0, \text{ γιατί με } x > x_0 \text{ είναι } f'(x) > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$ οπότε η ρίζα της ρ είναι μοναδική.

Δ4.

Είναι $0 < x_0 < \rho < 1$ με $f(\rho) = x_0 - \rho$ από Δ3.

- Το ζητούμενο γράφεται $f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa) \Rightarrow f(x_0) - f(\rho) > (x_0 - \rho)f'(\kappa)$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ)

Αρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$

Είναι $0 < x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$ και f' γνησίως αύξουσα άρα

$$\begin{aligned} f'(\xi) < f'(\kappa) &\Rightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \Rightarrow f(x_0) - f(\rho) > (x_0 - \rho)f'(\kappa) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1), \kappa \in (\rho, 1) \end{aligned}$$

